Πανεπιστημιο Ιωαννινων	γεωμετρια μετασχηματισμων
Σχολη θετικων επιστημων	(εξετασεις περιοδου ιουνιου)
Τμημα Μαθηματικων	διδασκων: Χρηστος Κ. Τατακης
Τομεας αλγεβρας και γεωμετριας	24 ιουνιου 2016

ΘΕΜΑ 1. Να χαρακτηρίσετε ως **σωστή** ή **λανθασμένη**, κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις. Σε κάθε ερώτημα να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(1) Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της ομοιοθεσίας είναι ένας γραμμικός γεωμετρικός μετασχηματισμός.

(2) Μια ισομετρία που αφήνει σταθερά τρία μη συνευθειακά σημεία, συμπίπτει πάντα με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό.

(3) Η αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο C, δίνεται στο μιγαδικό επίπεδο μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού $\varphi_C(z) = \overline{z}$.

(4) Η εικόνα της καμπύλης $y = \dfrac{1}{x}$ ως προς τον γεωμετρικό μετασχηματισμό του επιπέδου, στροφής κέντρου $(0,0)$ και γωνίας $\dfrac{\pi}{4}$ είναι έλλειψη.

(5) Κάθε στροφή κέντρου O και γωνίας 2θ, μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο κατοπτρισμών ως προς δύο ευθείες, που τέμνονται στο O και σχηματίζουν γωνία ίση με θ.

(6) Η σύνθεση δύο αντιστροφών, με κύκλους αντιστροφής $C_1((0,0), R_1)$ και $C_2((0,0), R_2)$ με $R_1 \neq R_2$, είναι ομοιοθεσία του επιπέδου.

(2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2.

(1) Να αποδείξετε ότι η σύνθεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών της μεταφοράς του επιπέδου κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ και της ομοιοθεσίας με κέντρο το σημείο O και λόγο $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι μια ομοιοθεσία.

(1 μονάδα)

(2) Δίνονται οι ομοιοθεσίες $H_{O,1/2}$ και $H_{P,2}$, όπου $O \neq P$ σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Να δειχθεί ότι η σύνθεση αυτών είναι μεταφορά κατά διάνυσμα παράλληλο προς το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$. Τι μπορούμε να πούμε στη περίπτωση όπου τα σημεία P, O ταυτίζονται; Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3.

(1) Να προσδιορίσετε την ομάδα συμμετριών (του επιπέδου) ενός τριγώνου. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η παραπάνω ομάδα είναι αβελιανή.

(1.5 μονάδες)

(2) Να προσδιορίσετε την ομάδα συμμετριών (του επιπέδου) ενός ρόμβου. Με ποια γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η παραπάνω ομάδα; Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(0.5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4.

(1) Θεωρούμε κύκλο C, κέντρου O και ακτίνας ϱ. Να κατασκευάσετε (γεωμετρικά) το αντίστροφο P' ενός σημείου P, ως προς τον κύκλο αντιστροφής C. Στη συνέχεια αν AB η διάμετρος του C, στην προέκταση της οποίας ανήκουν τα P, P', να αποδείξετε ότι

$$(AP)(BP') = (AP')(BP).$$

(1.5 μονάδες)

(2) Να κατασκευάσετε κύκλο C_1, ορθογώνιο προς δοθέντα κύκλο $C(K, R)$, έτσι ώστε ο κύκλος C_1 να αντιστρέφει δοθέντα σημεία A, B του επιπέδου, όπου $A, B \neq K$ και τα σημεία K, A, B είναι μη συνευθειακά.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 5.

Έστω κύκλος $C_1(K, R)$. Θεωρούμε τα σημεία $P \neq K$ τυχόν σημείο του επιπέδου, το οποίο δεν ανήκει στον κύκλο C_1 και P' το αντίστροφο του σημείου P ως προς την αντιστροφή $C_1(K, R)$. Αν C_2 κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία P, P', να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2 είναι ορθογώνιοι. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε την εικόνα του χωρίου $C_1 \cap C_2$ ως προς την αντιστροφή με κύκλο αντιστροφής τον $C_1(K, R)$.

(1.5 μονάδες)

Καλή επιτυχία !!!
